ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2022-2023

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ – ΟΔΗΓΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ – Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Α1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^x - 3x + \sigma\upsilon\nu x - 2\pi - \sqrt{x}\ , \quad x > 0$

β) $g(x) = x^4 \eta\mu 2x\ , \quad x \in \mathbb{R}$

Λύση:

α) $f'(x) = e^x - 3 - \eta\mu x - 0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 5 x 1

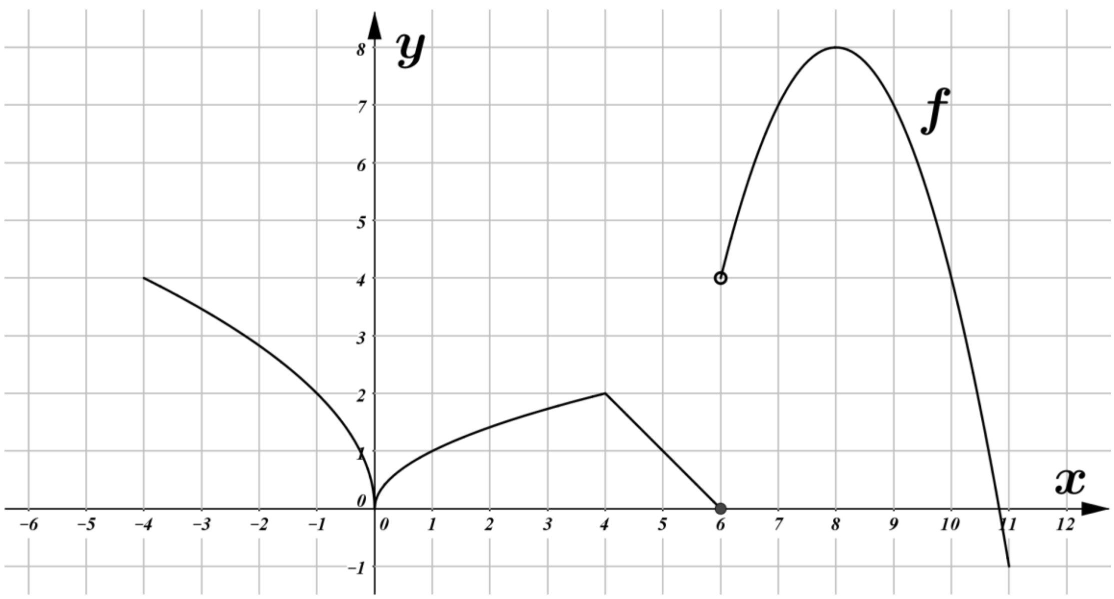
β) $f'(x) = (x^4)' \cdot \eta\mu 2x + x^4 \cdot (\eta\mu 2x)'$ 1 + 1

$= 4x^3 \cdot \eta\mu 2x + x^4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \cdot (2x)'$

1 1,5

$= 4x^3 \cdot \eta\mu 2x + 2x^4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$ 0,5

Α2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις:

i) Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(4,2)$.

ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 6$.

iii) $f'(-1) < 0$

iv) $f'(8) = 0$

v) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

Λύση:

i) ΛΑΘΟΣ

ii) ΛΑΘΟΣ

iii) ΣΩΣΤΟ

iv) ΣΩΣΤΟ

v) ΣΩΣΤΟ

5 x 2

Α3. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\log(2x+7) - 1 = \log(1-x)$$

Λύση:

Α΄ τρόπος

$\log(2x+7) - 1 = \log(1-x)$

$2x + 7 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{2}$ και $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ 1 + 1

Άρα, $x \in \left(-\frac{7}{2}, 1\right)$ 0,5

$\log(2x+7) - \log 10 = \log(1-x)$

1

$\log\left(\frac{2x+7}{10}\right) = \log(1-x)$ 2

$\frac{2x+7}{10} = (1-x)$ 1 $(\text{Η } f(x) = \log x \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ 1-1)$

$2x + 7 = 10 - 10x$ 1

$12x = 3$ 1

$x = \frac{1}{4}$ Δεκτή

1 0,5

Β΄ τρόπος

$\log(2x+7)-1=\log(1-x)$

$2x+7>0 \Leftrightarrow x>-\frac{7}{2}$ και $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$ 1 + 1

Άρα, $x \in \left(-\frac{7}{2}, 1\right)$ 0,5

$\log(2x+7)-\log(1-x)=1$ 1

$\log\left(\frac{2x+7}{1-x}\right)=1$ 2

$\frac{2x+7}{1-x}=10$ 1

$2x+7=10-10x$ 1

$12x=3$ 1

$x=\frac{1}{4}$ Δεκτή 0,5

1

Α4. Αν $y=\frac{\ln(2x)}{x^2}$, $x>0$, να δείξετε ότι: $x^4\frac{d^2y}{dx^2}+5x^3\frac{dy}{dx}+4x^2y=0$

Λύση:

Α΄ τρόπος (παραγωγίζω πηλίκο)

$\frac{dy}{dx}=\frac{[\ln(2x)]'\cdot x^2-\ln(2x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}$ 1

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{(2x)'}{2x}\cdot x^2-2x\cdot\ln(2x)}{x^4}$ 0,5 + 0,5 + 0,5

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2}{2x}\cdot x^2-2x\cdot\ln(2x)}{x^4}$ 0,5

$\frac{dy}{dx}=\frac{x-2x\cdot\ln(2x)}{x^4}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x\cdot(1-2\cdot\ln 2x)}{x^4}$ $(x\neq 0)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2\cdot\ln(2x)}{x^3}$ 0,5

$x^3\cdot\frac{dy}{dx}=1-2\cdot\ln(2x)$ 0,5

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{[1-2\cdot\ln(2x)]'\cdot x^3-[1-2\cdot\ln(2x)]\cdot(x^3)'}{(x^3)^2}$$ 1

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\cdot\frac{2}{2x}\cdot x^3-3x^2\cdot[1-2\cdot\ln(2x)]}{x^6}$$ 0,5 + 0,5 + 0,5

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2x^2-3x^2+6x^2\cdot\ln(2x)}{x^6}$$ 0,5

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^2\cdot[-5+6\cdot\ln(2x)]}{x^6}\qquad (x\neq 0)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-5+6\cdot\ln(2x)}{x^4}$$ 0,5

$$x^4\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=-5+6\cdot\ln(2x)$$ 0,5

1

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+5x^3\frac{dy}{dx}+4x^2y=-5+6\cdot\ln(2x)+5\cdot[1-2\cdot\ln(2x)]+4\cdot\ln(2x)$$

$$=-5+10\cdot\ln(2x)+5-10\cdot\ln(2x)=0$$ 0,5 0,5

Β΄ τρόπος

$$y=\frac{\ln(2x)}{x^2},\ x>0$$

$$y\cdot x^2=\ln(2x)$$ 0,5

$$\frac{dy}{dx}\cdot x^2+y\cdot 2x=\frac{2}{2x}$$ 1 + 1 + 1

$$x^2\cdot\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{x}$$

$$x^3\frac{dy}{dx}+2x^2y=1$$ 0,5

$$3x^2\cdot\frac{dy}{dx}+x^3\frac{d^2y}{dx^2}+4xy+2x^2\frac{dy}{dx}=0$$ 1 + 1 + 1 + 1

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}+5x^2\cdot\frac{dy}{dx}+4xy=0$$ 0,5

Πολλαπλασιάζω με το $x>0$, 0,5

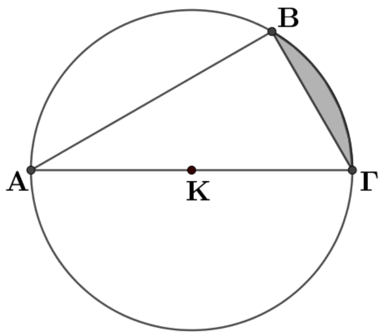
$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+5x^3\cdot\frac{dy}{dx}+4x^2y=0$$ 1

Α5. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο $(Κ, R)$. Αν $ΑΒ = \lambda_3$, να βρείτε συναρτήσει του R:

α) Το μήκος του τόξου $ΒΓ$. (μον. 3)

β) Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $ΑΒΓ$. (μον. 2)

γ) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (μον. 5)



Λύση:

$AB = \lambda_3 \Leftrightarrow AB = R\sqrt{3}$ 0,5

0,5

Φέρω ακτίνα $KB \Rightarrow A\widehat{K}B = 120°$ $(AB = \lambda_3 \Leftrightarrow A\widehat{K}B = \widehat{K}_3)$

Άρα, $B\widehat{K}Γ = 60°$ (παραπληρωματικές)

0,5

α) Άρα, $\gamma_{ΒΓ} = \frac{2\pi R \cdot \theta}{360°} = \frac{2\pi R \cdot 60°}{360°} = \frac{\pi R}{3}$ $\mu.\mu.$ 0,5 + 0,5 + 0,5

β) $Π_{\mu.ΑΒΓ} = AB + AΓ + \gamma_{\tau όξου\ ΒΓ}$ 1

$= \left(R\sqrt{3} + 2R + \frac{\pi R}{3}\right)$ $\mu.\mu.$ 1 $(-0{,}5$ για κάθε λάθος)

γ) $E_{\sigma\kappa\iota\alpha\sigma\mu.} = E_{\kappa.\tau.ΚΒΓ} - E_{\tau\rho\iota\gamma.ΚΒΓ}$ 1

$= \frac{\pi R^2 \cdot \theta}{360°} - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu\theta$ 1+1

$= \frac{\pi R^2 \cdot 60°}{360°} - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 60°$ 0,5 + 0,5

$= \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$ $\tau.\mu.$ 0,5 + 0,5

A6. Δίνεται καμπύλη με εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 27$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια. (μον. 8)

β) Τις εξισώσεις των οριζόντιων αυτών εφαπτομένων. (μον. 2)

Λύση:

α) $x^2 - xy + y^2 = 27$

$$2x - y - x\cdot\frac{dy}{dx} + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$ 0,5 + 0,5 + 0,5 +1 +0,5

$$\frac{dy}{dx}(x-2y) = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y}$$ 0,5

Για να είναι οι εφαπτόμενες οριζόντιες πρέπει $\lambda_{\varepsilon\varphi} = 0$. 0,5

Άρα, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o} = \lambda_{\varepsilon\varphi} = 0$ 0,5

$2x - y = 0$ και $x - 2y \neq 0$ 0,5 + 0,5

$y = 2x$ $\quad$ $x \neq 2y$

Άρα, $x^2 - xy + y^2 = 27$

$$x^2 - x\cdot 2x + (2x)^2 = 27$$ 0,5

$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 27 \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

0,5 0,5

Για $x = 3 \Longrightarrow y = 6 \quad (x \neq 2y) \quad \Longrightarrow A(3,6)$ 0,5

Για $x = -3 \Longrightarrow y = -6 \quad (x \neq 2y) \quad \Longrightarrow B(-3,-6)$ 0,5

β) Τα σημεία όπου οι εφαπτόμενες είναι οριζόντιες είναι τα $A(3,6)$και $B(-3,-6)$

Οι εφαπτόμενες είναι οριζόντιες (κλίση $= 0$) άρα παράλληλες με xx' άξονα. 1

(ή με άλλον τρόπο αιτιολόγησης)

Άρα, οι εξισώσεις τους είναι:

$y = 6$ και $y = -6$ αντίστοιχα 0,5 + 0,5

Τ Ε Λ Ο Σ   Μ Ε Ρ Ο Υ Σ   Α΄

Α Κ Ο Λ Ο Υ Θ Ε Ι   Τ Ο   Μ Ε Ρ Ο Σ   Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.

Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 με δεκαπέντε (15) μονάδες.

Β1. Ένα πετρελαιοφόρο πλοίο, μετά από ατύχημα, σχημάτισε στην επιφάνεια της θάλασσας πετρελαιοκηλίδα κυκλικού σχήματος με ακτίνα R (σε km). Η ακτίνα (R) είναι συνάρτηση, η οποία μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο t (σε μέρες) και ορίζεται από τον τύπο $R(t) = t^2 + 2t,\ t \geq 0$. Θεωρούμε ότι το σχήμα της πετρελαιοκηλίδας παραμένει κυκλικό και το κέντρο της είναι σταθερό στο σημείο του ατυχήματος. Να βρείτε:

α) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της πετρελαιοκηλίδας στο τέλος της 4ης μέρας μετά το ατύχημα. (μον. 5)

β) Σε πόσες μέρες, μετά το ατύχημα, θα φτάσει η πετρελαιοκηλίδα στην ακτή, αν το κέντρο της απέχει 168 km από την ακτή. (μον. 3)

γ) Να βρείτε μετά από πόσες μέρες ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της περιφέρειας της πετρελαιοκηλίδας θα είναι $44\pi\ km/μέρα$. (μον. 2)

Λύση:

$R(t) = t^2 + 2t \Rightarrow R'(t) = 2t + 2\,,\, t \geq 0$ 0,5

$E(t) = \pi R^2(t) \Rightarrow E'(t) = 2\pi R(t) \cdot R'(t)$ 2

0,5

$E'(t) = 2\pi(t^2 + 2t) \cdot (2t + 2)$ 0,5

ή

$E(t) = \pi R^2(t) \Rightarrow E(t) = \pi(t^2 + 2t)^2$

$E'(t) = 2\pi(t^2 + 2t) \cdot (2t + 2)$

Για $t = 4$, $E'(4) = 2\pi(4^2 + 2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4 + 2) = 480\pi\ km^2/μέρα$

0,5 0,5 0,5

β) $R(t) = 168km$

$R(t) = t^2 + 2t \Rightarrow t^2 + 2t = 168$ 1

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 168 = 0 \Leftrightarrow (t + 14)(t - 12) = 0$ 0,5

0,5 $t = -14$ (απορ.) ή $t = 12$ 0,5

Θα φτάσει στην ακτή μετά από 12 μέρες. 0,5 γ) $\Gamma'(t) = 44\pi \frac{km}{μέρα}$, $\Gamma(t) = 2\pi R(t)$ 0,5

$\Gamma'(t) = 2\pi \cdot R'(t) \Rightarrow 44\pi = 2\pi \cdot (2t+2) \Leftrightarrow$ 0,5

0,5

$44 = 4 \cdot (t+1) \Leftrightarrow 11 = t+1 \Leftrightarrow t = 10$ 0,5

Σε 10 μέρες.

ή

$\Gamma(t) = 2\pi R(t) \Leftrightarrow \Gamma(t) = 2\pi(t^2 + 2t)$

$\Gamma'(t) = 2\pi \cdot (2t+2) \Rightarrow 44\pi = 2\pi \cdot (2t+2) \Leftrightarrow$

$44 = 4 \cdot (t+1) \Leftrightarrow 11 = t+1 \Leftrightarrow t = 10$

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1 \\ \sqrt{x} + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. (μον. 8)

β) Αν $a = \frac{1}{4}$ και $\beta = -\frac{3}{4}$, να βρείτε:

i) Την παράγωγο συνάρτηση, $f'(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. (μον. 3)

ii) Την εξίσωση της κάθετης ευθείας, της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. (μον. 4)

Λύση:

α) Παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1 \Longrightarrow$ συνεχής στο $x_0 = 1$ 0,5

Άρα, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ 0,5

- $f(1) = a$ 0,5
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (\alpha x^2) = \alpha$ 0,5
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\sqrt{x} + \beta\right) = 1 + \beta$ 0,5

$\alpha = 1 + \beta$ 0,5

$\beta - \alpha = -1$

1

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ τότε θα υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$

Άρα:

0,5 + 0,5 0,5

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\alpha x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\alpha(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\alpha(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \alpha(x+1) = 2\alpha$$

0,5 + 0,5 0,5

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}+\beta-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

Αφού το όριο υπάρχει τα πλευρικά όρια είναι ίσα, άρα

$2\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{4}$ 0,5

$\beta=1-\alpha=1-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$ 0,5

β) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2, & x\leq 1\\ \sqrt{x}-\frac{3}{4}, & x>1\end{cases}$

i) Για $x<1$, $f'(x)=\frac{1}{2}x$

Για $x>1$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

0,5

Από ερώτημα (α) η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και ισχύει $f'(1)=\frac{1}{2}$

Άρα, $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x>1\end{cases}$ 1 + 0,5 + 1

ii) Για $x_0=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{4}$ 0,5 1 + 1

$\lambda_{\varepsilon\varphi}=f'(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow \lambda_{\kappa\alpha\theta}=-2\quad (\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_{\kappa\alpha\theta}=-1)$

Εξίσωση της καθέτου: $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ 0,5

0,5 $y-\frac{1}{4}=-2(x-1)\Leftrightarrow 4y-1=-8x+8$

$\Leftrightarrow 8x+4y-9=0$ 0,5

Β3. α) Να βρείτε την ορθή απάντηση στα πιο κάτω ερωτήματα. Υπάρχει μόνο μία ορθή απάντηση σε κάθε ερώτημα: (μον. 3)

i) Αν $\ln x = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε το x είναι ίσο με:

Α) $\frac{1}{\kappa}$ Β) $e^{-\kappa}$ Γ) e Δ) e^{κ} Ε) κανένα από τα προηγούμενα

ii) Αν $x > 0$, τότε $\log\sqrt{x}$ ισούται με:

Α) $\sqrt{\log x}$ Β) $\log x^2$ Γ) $\frac{1}{2}\log\sqrt{x}$ Δ) $\frac{1}{2}\log x$ Ε) x^2

iii) Αν $\log 2 = \alpha$ και $\log 5 = \beta$, τότε $\log 20$ είναι ίσο με:

Α) $\beta - 2\alpha$ Β) $2\alpha - \beta$ Γ) $\alpha + \beta$ Δ) $2\alpha + \beta$ Ε) $2\alpha + 2\beta$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ορίζεται εκθετική συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (2a^2 - 5a + 3)^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (μον. 4)

γ) Αν στο προηγούμενο ερώτημα (β) ισχύει ότι $a = 0$:

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \frac{15}{f(x)} - 8 = 0$. (μον. 4)

ii) Αν επιπλέον η f αντιστρέφεται, να γράψετε τους τύπους και τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$, $f(-x)$ και $f^{-1}(x)$. Στη συνέχεια, να τις παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων. (μον. 4)

Λύση:

α) i) Δ ii) Δ iii) Δ 3 x 1

β) $f(x) = (2a^2 - 5a + 3)^x$

Για να ορίζει η f εκθετική συνάρτηση πρέπει

$2a^2 - 5a + 3 > 0$ 0,5 και $2a^2 - 5a + 3 \neq 1$ 0,5

$(2\alpha - 3)(\alpha - 1) > 0$ 0,5 $2a^2 - 5a + 2 \neq 0$

$(2\alpha - 1)(\alpha - 2) \neq 0$ 0,5

$\alpha \neq \frac{1}{2}$ και $\alpha \neq 2$

α	$-\infty$	1	3/2	$+\infty$
πρόσημο του $2\alpha^2 - 5\alpha + 3$	+	0 −	0	+

1

ή

α	$-\infty$		$1/2$		1		$3/2$		2		$+\infty$
$2\alpha^2-5\alpha+3>0$ $2\alpha^2-5\alpha+2\neq 0$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	

1

$$\alpha \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$$ 1

γ) i) $\alpha = 0 \Rightarrow f(x) = 3^x$ 0,5

$f(x) + \frac{15}{f(x)} - 8 = 0 \Leftrightarrow 3^x + \frac{15}{3^x} - 8 = 0$ 0,5

$3^{2x} - 8\cdot 3^x + 15 = 0 \Leftrightarrow (3^x-5)(3^x-3) = 0$ 0,5

0,5

$3^x = 5$ ή $3^x = 3$

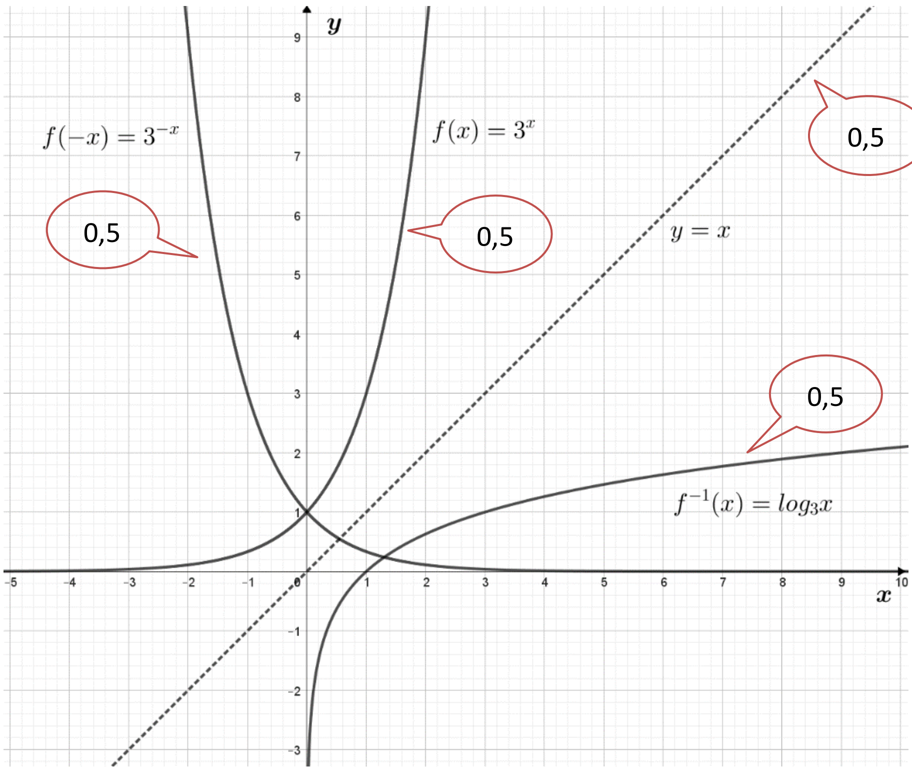
$x = \log_3 5$ ή $x = 1$

0,5 + 0,5   0,5 + 0,5

ii) $f(x) = 3^x\,, x \in \mathbb{R}$ 0,5

$f(-x) = 3^{-x}\,, x\in\mathbb{R}$ 0,5

$f^{-1}(x) = \log_3 x\ ,\quad x > 0$ 0,5+0,5



ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΟΥ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τριγωνομετρία

$$\text{ημ}(\text{Α} \pm \text{Β}) = \text{ημΑσυνΒ} \pm \text{συνΑημΒ}$$

$$\text{συν}(\text{Α} \pm \text{Β}) = \text{συνΑσυνΒ} \mp \text{ημΑημΒ}$$

$$2\text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\beta = \text{ημ}(\alpha - \beta) + \text{ημ}(\alpha + \beta)$$

$$2\text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\beta = \text{συν}(\alpha - \beta) + \text{συν}(\alpha + \beta)$$

$$2\text{ημ}\alpha \cdot \text{ημ}\beta = \text{συν}(\alpha - \beta) - \text{συν}(\alpha + \beta)$$

$\text{ημ}2\alpha = 2\text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\alpha$ $\qquad$ $\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha$

$\text{ημ}^2\alpha = \frac{1-\text{συν}2\alpha}{2}$ $\qquad$ $\text{συν}^2\alpha = \frac{1+\text{συν}2\alpha}{2}$

$\text{ημ}2\alpha = \frac{2\text{εφ}\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha}$ $\qquad$ $\text{συν}2\alpha = \frac{1-\text{εφ}^2\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha}$

$$\text{ημΑ} + \text{ημΒ} = 2\text{ημ}\frac{\text{Α}+\text{Β}}{2}\,\text{συν}\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2}$$

$$\text{ημΑ} - \text{ημΒ} = 2\text{ημ}\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2}\,\text{συν}\frac{\text{Α}+\text{Β}}{2}$$

$$\text{συνΑ} + \text{συνΒ} = 2\text{συν}\frac{\text{Α}+\text{Β}}{2}\,\text{συν}\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2}$$

$$\text{συνΑ} - \text{συνΒ} = 2\text{ημ}\frac{\text{Β}-\text{Α}}{2}\,\text{ημ}\frac{\text{Α}+\text{Β}}{2}$$

$\alpha = 2\text{R}\,\text{ημΑ}$ $\qquad$ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συνΑ}$ $\qquad$ $\text{Ε} = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ημΑ}$